Podstawy obliczeń inżynierskich 2 – projekt

Ćwiczenie 1 - Wprowadzenie

Wielkości skalarne, wektorowe i tensorowe

Do opisu zjawisk fizycznych i chemicznych wykorzystuje się wiele różnych wielkości fizycznych. W zależności od definicji i właściwości tych wielkości fizycznych mogą one mieć charakter skalarów, wektorów lub tensorów. W Tabeli 1 przedstawiono podstawowe właściwości skalarnych, wektorowych i tensorowych.

Tabela 1. Charakterystyka wielkości skalarnych, wektorowych i tensorowych

	Skalar	**Wektor**	**Tensor**
Ilość liczb opisująca daną wielkość w przestrzeni n-wymiarowej	1	n	n^2
Postać w przestrzeni dwuwymiarowej	a	$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y]$	$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}$
Postać w przestrzeni trójwymiarowej	a	$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]$	$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}$
Najważniejsze działania	• dodawanie • odejmowanie • mnożenie • dzielenie	• mnożenie przez skalar • dodawanie • odejmowanie • dzielenie wektora na składowe • mnożenie skalarne · • mnożenie wektorowe × • wyznaczanie długości wektora $\lvert\mathbf{a}\rvert$	• mnożenie przez skalar • dodawanie • odejmowanie • dekompozycja tensora na część symetryczną oraz antysymetryczną
Przykładowa wielkość fizyczna	ciśnienie p	siła $\mathbf{F}$	naprężenie $\boldsymbol{\sigma}$

Iloczyn skalarny i wektorowy

Istnieją dwa różne typy operacji mnożenia dwóch wektorów, mianowicie iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ oraz iloczyn wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, które tworzą między sobą kąt α, jest skalarem i jest zdefiniowany poniżej:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1)$$

Iloczyn wektorowy tych dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest natomiast wektorem i jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

gdzie $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ to wektory jednostkowe (wersory) kierunków x, y oraz z. Kierunek iloczynu wektorowego dwóch wektorów jest prostopadły do płaszczyzny rozpinanej przez te wektory, natomiast jego zwrot może zostać wyznaczony z reguły śruby prawoskrętnej lub z reguły prawej dłoni (wynika on również z równania 2, ale w praktyce rzadko się z niego korzysta do wyznaczania zwrotu iloczynu wektorowego). Wartość iloczynu wektorowego dwóch wektorów (czyli długość wektora, który jest iloczynem wektorowym) może zostać wyznaczona z poniższego wzoru:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\alpha \qquad (3)$$

Należy zwrócić uwagę, że iloczyn skalarny jest przemienny ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$), natomiast iloczyn wektorowy przemienny nie jest ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$).

Moment siły

Moment siły $\mathbf{M}$ względem dowolnego punktu A jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego $\mathbf{r}$ oraz siły $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4)$$

Promień wodzący jest wektorem o początku w punkcie A i końcu w miejscu zaczepienia siły $\mathbf{F}$. Moment siły jest wielkością wektorową (tzw. wektorem osiowym/pseudowektorem).
Wartość momentu siły może być wyznaczona z następującego wzoru:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin\alpha = d|\mathbf{F}| \qquad (5)$$

gdzie α to kąt między wektorami $\mathbf{r}$ oraz $\mathbf{F}$, a d to odległość prostej, na której leży wektor, od punktu A.

Należy zauważyć, że moment siły obliczony względem punktu A jest równy 0 w trzech szczególnych przypadkach:

- $\mathrm{F} = 0$, czyli brak jest siły, która powodowałaby występowanie momentu siły.
- $r = 0$, czyli ramię siły jest równe zero, czyli siła jest „przyczepiona” w punkcie A.
- $\sin\alpha = 0$ (co oznacza, że $\alpha = 0°$ lub $\alpha = 180°$), czyli siła leży na prostej przechodzącej przez punkt A.

Równania równowagi (równania statyki)

Równania równowagi dla ciała sztywnego, zwane również równaniami statyki, wynikają bezpośrednio z zasad dynamiki Newtona. Opisują one warunek równowagi dla ciała sztywnego, który jest spełniony wtedy, gdy suma wszystkich sił działających na ciało jest równa zero oraz gdy równocześnie wypadkowy moment siły pochodzący od wszystkich sił, obliczony względem dowolnego punktu, wynosi zero. Dla układu płaskiego, w którym na ciało sztywne działają siły czynne P oraz siły bierne R (pochodzące z reakcji podpór) warunek równowagi dla ciała sztywnego jest dany przez poniższy układ równań:

$$\begin{cases} \sum P_x + \sum R_x = 0 \\ \sum P_y + \sum R_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \tag{6}$$

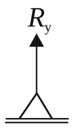
Pierwsze równanie to bilans sił w kierunku x, drugie równanie to bilans sił w kierunku y, natomiast trzecie równanie to bilans momentów sił względem punktu A (alternatywnie można rozważać również zerowanie się trzech wypadkowych momentów sił liczonych względem trzech punktów A, B, C, które nie leżą na jednej prostej). Najczęściej dla danego ciała sztywnego znane są siły czynne P, natomiast zadaniem jest wyznaczenie reakcji podpór, tj. sił biernych R działających w układzie. Jeśli z równań równowagi można jednoznacznie wyznaczyć siły bierne R, to układ jest tzw. układem statycznie wyznaczalnym. W przeciwnym razie układ jest układem statycznie niewyznaczalnym.
W płaskich układach sił występują dwa podstawowe typy sił czynnych:

- Siła skupiona F [N], działająca w określonym punkcie.
- Siła ciągła q [N/m], działająca na określonym odcinku ciała sztywnego.

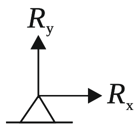
Podpory

Siły bierne działające na ciało sztywne zależą od typu podpory, przy której działają. Najczęściej spotykane typy podpór są przedstawione poniżej:

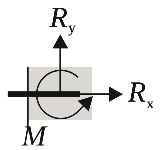
Podpora przegubowo-przesuwna



Podpora przegubowa



Sztywne utwierdzenie



Algorytm rozwiązywania zadań dla układów statycznie wyznaczalnych

1. Graficzne przestawienie układu statycznego
2. Wybór układu współrzędnych
3. Oznaczenie sił i momentów biernych (sił i momentów sił pochodzących od podpór)
4. Sformułowanie i rozwiązanie równań równowagi
5. Sprawdzenie poprawności obliczeń (np. suma momentów sił względem innego punktu)

Zadania

1. Znaleźć reakcje podpór dla układu płaskiego:

a)

b)